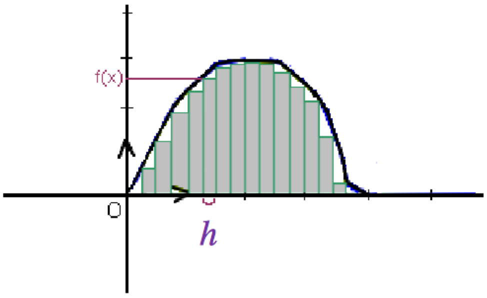
Valeur approchée d'une intégrale

I. Méthode des rectangles

La première méthode qui vient à l'esprit consiste à découper l'aire entre la courbe $f(x)$, l'axe des x et les droites $x= a$ et $x = b$, en une multitude de petits rectangles de largeur faible, notée h, et de hauteur $f(x)$.



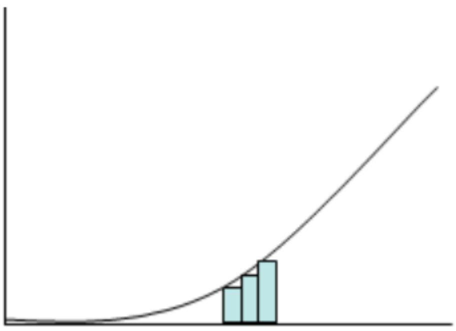
L'aire sous la courbe est obtenue en **sommant** tous ces petits rectangles.

On a le choix entre trois techniques : **méthode des rectangles à gauche**, **méthode des rectangles à droite** et **méthode du point milieu**.

Posons $h = (b - a)/n$, où n est le nombre de rectangles avec lesquels on pave l'aire à calculer. Evidement, plus n sera grand et plus la précision du calcul sera grande

1. Méthode de rectangles à gauche

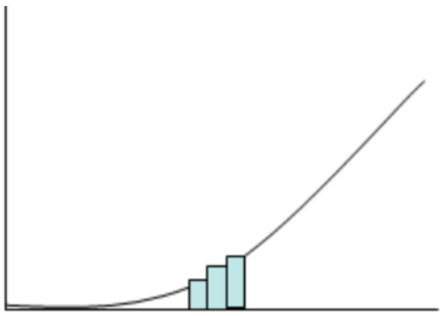
On fait coïncider le sommet haut gauche de chaque rectangle avec la courbe



$$S_{\text{REC GAUCHE}} = \sum_{i=0}^{n-1} h\, f(a+ih)$$

2. Méthode des rectangles à droite

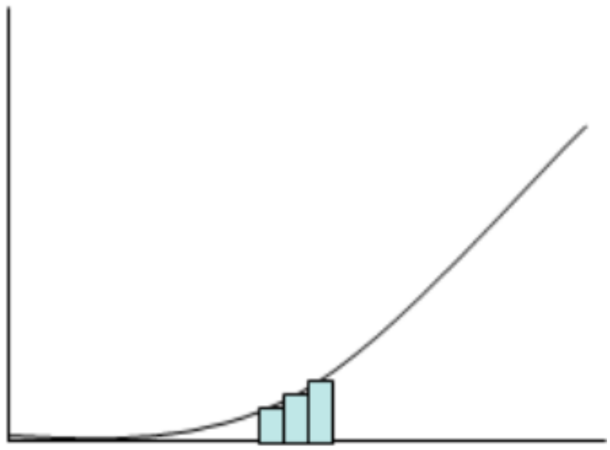
On fait coïncider le sommet haut droit de chaque rectangle avec la courbe



$$S_{\text{REC DROIT}} = \sum_{i=0}^{n-1} h\, f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right)$$

3. Méthode du point milieu

On fait coïncider le milieu du coté haut du rectangle avec la courbe

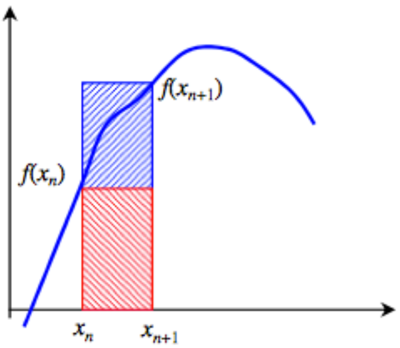


$$S_{\text{REC MILIEU}} = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + \sum_{i=1}^{n-1} h\, f(a + ih)$$

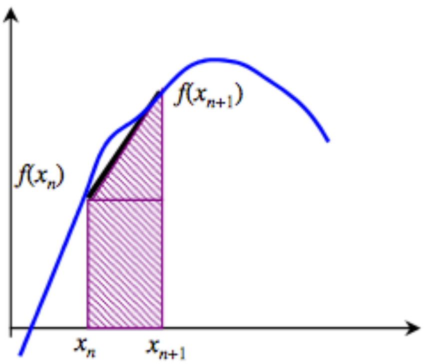
II. Méthode de trapèze

Comme on ne voit pas de raison de privilégier les rectangles à droite par rapport aux rectangles à gauche, on peut penser à faire la moyenne des résultats obtenus par les méthodes des rectangles soit

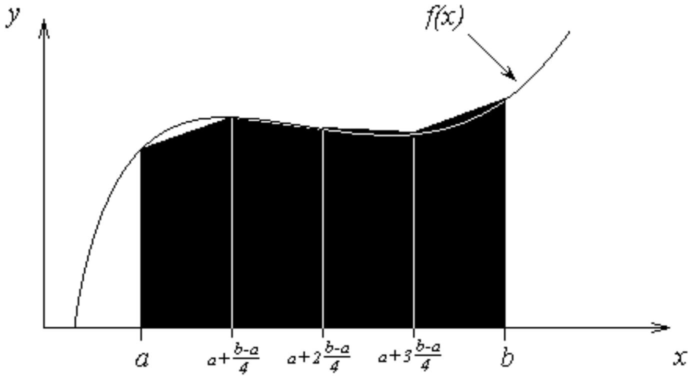
$$R_n = \frac{R_{G,n} + R_{D,n}}{2}$$



La moyenne des aires des deux rectangles est aussi l'aire du trapèze délimité par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que *f* en x_n et en x_{n+1}.



$$I = \int_a^b f(x)dx$$
$$= \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)dx + \ldots + \int_{a+(n-2)h}^{a+(n-1)h} f(x)dx + \int_{a+(n-1)h}^{b} f(x)dx \qquad (1)$$



L'application de la règle trapézoïdale L'équation (1) sur chaque segment donne

$$\int_a^b f(x)dx = [(a+h)-a]\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2}\right]$$
$$+[(a+2h)-(a+h)]\left[\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad +[(a+(n-1)h)-(a+(n-2)h)]\left[\frac{f(a+(n-2)h)+f(a+(n-1)h)}{2}\right]$$
$$+[b-(a+(n-1)h)]\left[\frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2}\right]$$
$$= h\left[\frac{f(a)+f(a+h)}{2}\right] + h\left[\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ h\left[\frac{f(a+(n-2)h)+f(a+(n-1)h)}{2}\right] + h\left[\frac{f(a+(n-1)h)+f(b)}{2}\right]$$
$$= h\left[\frac{f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+2f(a+(n-1)h)+f(b)}{2}\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(a)+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\}+f(b)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right\}+f(b)\right] \qquad (2)$$

III. Simpson 1/3

La méthode de Simpson 1/3 est une extension de la méthode de trapèze

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

L'intervalle [a,b] est divisée sur 2 segments donc :

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Tout comme dans la méthode trapèze, on peut subdiviser l'intervalle en segments et appliquer la méthode de Simpson 1/2 à plusieurs reprises sur tous les deux segments. Notez que cela doit être pair. Divisez l'intervalle en segments égaux, de sorte que la largeur du segment soit donnée par $h = \frac{b-a}{n}$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Où

$$x_0 = a$$

$$x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Appliquer la méthode de Simpson 1/3 sur chaque intervalle,

$$\int_a^b f(x)dx \cong (x_2 - x_0)\left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}\right] + (x_4 - x_2)\left[\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}\right] + \ldots$$

$$+ (x_{n-2} - x_{n-4})\left[\frac{f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})}{6}\right] + (x_n - x_{n-2})\left[\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}\right]$$

Puisque

$$x_i - x_{i-2} = 2h$$

$$i = 2, 4, \ldots, n$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx \cong 2h\left[\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}\right] + 2h\left[\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}\right] + \ldots$$

$$+ 2h\left[\frac{f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})}{6}\right] + 2h\left[\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\left\{f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right\} + 2\left\{f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\right\} + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]}$$